УДК 512.647.2

О КРИВОЙ П.А. ШИРОКОВА И ТЕОРЕМАХ ХАУСДОРФА И ДАЙНСА

М.Ю. Кокурин

Аннотация

Обсуждается связь геометрических результатов П.А. Широкова, полученных им в 30-е годы двадцатого столетия, и классических теорем Ф. Хаусдорфа и Л. Дайнса.

Ключевые слова: квадратичная форма, числовой образ, граничная кривая.

Пусть Q – комплексная $n\times n$ – матрица, то есть $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Числовым образом (хаусдорфовым множеством) матрицы Q называется множество

$$W(Q) = \{(Qz, z)_{\mathbb{C}^n} : z \in \mathbb{C}^n, \|z\|_{\mathbb{C}^n} = 1\}. \tag{1}$$

Множество $W(Q)$, очевидно, замкнуто. Важная роль в матричном анализе принадлежит классической теореме Ф. Хаусдорфа [1]:

Теорема 1. *Множество $W(Q)$ выпукло.*

Подробный обзор свойств матричного числового образа можно найти в [1, 2]. Пусть A, B – симметричные вещественные матрицы порядка $n \times n$. Рассмотрим отображение

$$F_{A,B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2; \quad F_{A,B}(x) = ((Ax, x)_{\mathbb{R}^n}, (Bx, x)_{\mathbb{R}^n}), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что образ $R(F_{A,B})$ пространства $\mathbb{R}^n$ при отображении F является конусом в $\mathbb{R}^2$, возможно, незамкнутым. Следующая теорема Л. Дайнса [3] также хорошо известна.

Теорема 2. *Конус $R(F_{A,B})$ является выпуклым.*

Установим связь выпуклых множеств из теорем 1, 2. Через $\operatorname{cone} M = \{tx : x \in M, t \geq 0\}$ обозначается коническая, а через $\operatorname{conv} M$ стандартная выпуклая оболочка множества $M \subset \mathbb{R}^2$; $M + N = \{x + y : x \in M, y \in N\}$ есть алгебраическая сумма множеств $M, N \subset \mathbb{R}^2$. Комплексную плоскость $\mathbb{C}$ отождествляем с векторным пространством $\mathbb{R}^2$.

Предложение. $R(F_{A,B}) = \operatorname{cone} W(A + iB)$.

Доказательство. Полагая в (1) $Q = A+iB$, $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ и пользуясь равенствами $A^* = A$, $B^* = B$, после несложных преобразований получаем:

$$\operatorname{cone} W(A + iB) = \{((Ax, x)_{\mathbb{R}^n} + (Ay, y)_{\mathbb{R}^n}, (Bx, x)_{\mathbb{R}^n} + (By, y)_{\mathbb{R}^n}) : x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ввиду (2) включение $R(F_{A,B}) \subset \operatorname{cone} W(A + iB)$ очевидно. Обратно, из полученного представления конуса $\operatorname{cone} W(A + iB)$ следует, что $\operatorname{cone} W(A + iB) \subset R(F_{A,B}) + R(F_{A,B})$. Поскольку по теореме 2 конус $R(F_{A,B})$ выпуклый, то $R(F_{A,B}) + R(F_{A,B}) = R(F_{A,B})$. Предложение доказано. □

Представляет интерес аналитическое описание границы выпуклого множества $W(Q)$ для произвольной матрицы $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Согласно предложению в этом случае автоматически получаем и описание конуса $R(F_{A,B})$. Ниже через E_n обозначаем единичную $n \times n$-матрицу. Любая матрица $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ однозначно представима в виде $Q = \mathcal{A} + i\mathcal{B}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$. Именно, $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}(Q + Q^*)$, $\mathcal{B} = \dfrac{1}{2i}(Q - Q^*)$. Искомую аналитическую характеристику числового образа $W(Q)$ доставляет следующая теорема П.А. Широкова [4; 5, с. 453–459], относящаяся к 30-м годам двадцатого столетия.

Теорема 3. *$W(Q)$ есть наименьшее выпуклое множество, содержащее алгебраическую кривую $S(Q) \subset \mathbb{R}^2 = \{(\xi, \eta)\}$, определенную следующим условием: через каждую точку $S(Q)$ проходит касательная $u\xi + v\eta = w$, тангенциальные координаты $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ которой удовлетворяют соотношению $\det(u\mathcal{A} + v\mathcal{B} - wE_n) = 0$. Собственные числа матрицы Q лежат в вещественных фокусах кривой $S(Q)$.*

Таким образом, $W(Q) = \operatorname{conv} S(Q)$, $R(F_{A,B}) = \operatorname{cone}[\operatorname{conv} S(A + iB)]$.

К сожалению, работа П.А. Широкова [4] до настоящего времени остается незамеченной сообществом специалистов в области матричного анализа. Только этим можно объяснить тот факт, что в современных публикациях по данной тематике в качестве автора теоремы 3 указывается Р. Киппенхан, а кривая $S(Q)$ именуется кривой Киппенхана (см., например, [6–11]). В [6] термин *Kippenhahn curve* даже внесен в раздел *Key words and phrases*, чем подчеркнут общепринятый характер этого термина. Указанные публикации сопровождаются ссылками на работу 1951 года [12], где теорема 3 была доказана повторно. Недавно опубликован английский перевод статьи [12] (см. [13]). Необходимость такого перевода его авторы мотивируют ([13, Abstract]) именно постоянным цитированием работы [12] специалистами, исследующими числовые образы матриц. По нашему мнению, название кривой $S(Q)$, вынесенное в заголовок, является исторически более оправданным.

Summary

M.Yu. Kokurin. On P.A. Shirokov's Curve and Theorems of Hausdorff and Dines.

We discuss relations between geometric results obtained by P.A. Shirokov in 1930-s and classical theorems of F. Hausdorff and L. Dines.

Key words: quadratic form, numerical range, boundary curve.

Литература

1. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. – Новосибирск: Науч. книга, 1997. – 390 с.

2. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – Новокузнецк: ИО НФМИ, 2000. – 348 с.

3. *Dines L.* On the mapping of quadratic forms // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – V. 47, No 6. – P. 494–498.

4. *Широков П.А.* О границе области значений присоединенной формы // Изв. Физ.-матем. о-ва при Казан. ун-те. Сер. 3. – 1934–1935. – Т. VII. – С. 89–96.

5. *Широков П.А.* Избранные работы по геометрии. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1966. – 432 с.

6. *Gau H.-L.* Elliptic numerical ranges of 4×4 matrices // Taiwan. J. Math. – 2006. – V. 10, No 1. – P. 117–128.

7. *Nakazato H., Bebiano N., Providencia J.* The J-numerical range of a J-Hermitian matrix and related inequalities // Linear Algebra Appl. – 2008. – V. 428, No 11–12. – P. 2995–3014.

8. *Joswig M., Straub B.* On the numerical range map // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). – 1998. – V. 65, No 2. – P. 267–283.

9. *Caston L., Savova M., Spitkovsky I., Zobin N.* On eigenvalues and boundary curvature of the numerical range // Linear Algebra Appl. – 2001. – V. 322, No 1–3. – P. 129–140.

10. *Bebiano N., Lemos R., da Providкncia J., Soares G.* On the geometry of numerical ranges in spaces with an indefinite inner product // Linear Algebra Appl. – 2005. – V. 399. – P. 17–34.

11. *Zachlin P.* On the field of values of the inverse of a matrix: Dissertation. – Case Western Reserve University, Cleveland, USA, 2007. – 70 p.

12. *Kippenhahn R.* Uber den Wertevorrat einer Matrix // Math. Nachr. – 1951. – Bd. 6. – S. 193–228.

13. *Kippenhahn R.* On the numerical range of a matrix // Linear Multilinear Algebra. – 2008. – V. 56, No 1–2. – P. 185–225.

Поступила в редакцию
14.05.09

Кокурин Михаил Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и теории функций Марийского государственного университета, г. Йошкар-Ола.

E-mail: *kokurin@marsu.ru*